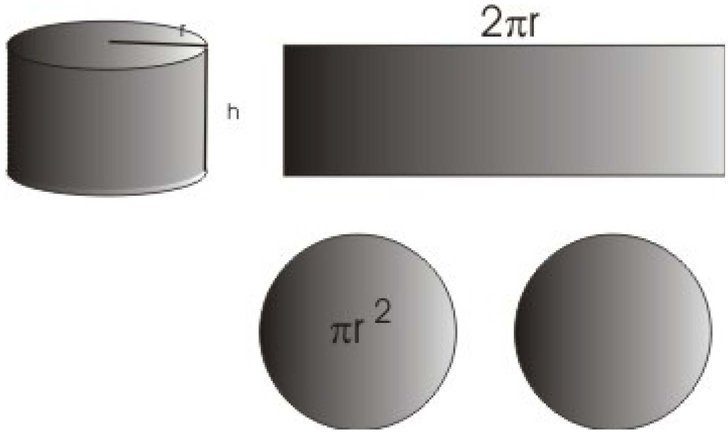
Bestimme die Maße einer Dose mit dem Volumen 1 Liter, für die der Materialbedarf am geringsten ist.

Mathematisches Modell einer Dose:

Zylinder mit Höhe h und Rsdius r



Volumen V = Grundfläche mal Höhe

Benutzer:

#1: $v = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Materialbedarf: Dosenblech mit einer bestimmten Stärke
hängt von der Oberfläche O des Zylinders ab.

O = Fläche des Bodens und des Deckels + Fläche des "Mantels"

Die Mantelfläche ist ein Rechteck mit der einen Seite h, die andere Seite ist der Umfang des Kreises,der den Boden bzw. Deckel darstellt.

Benutzer:

#2: $o = 2 \cdot (\pi \cdot r^2) + h \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$

Wenn das Volumen 1 Liter sein soll (1l=1000 Kubikzentimeter) dann ist

Benutzer:

#3: $v = 1000$

Benutzer:

#4: $1000 = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Dadurch wird beschrieben, dass r und h in einer bestimmten Beziehung zueinander sein müssen:
Wählte man r=10 cm, dann ergäbe sich für h:

Benutzer:

#5: $1000 = \pi \cdot 10^2 \cdot h$

Löse(#5,h):

#6: $\text{SOLVE}(1000 = \pi \cdot 10^2 \cdot h, h, \text{Real})$

Simp(Löse(#5,h)):

#7: $$h = \frac{10}{\pi}$$

Approx(#7):
#8: $$h = 3.183098861$$

Die 1-Liter-Dose müsste dann ca. 3,2 cm hoch sein.

Benutzer:

#9: $$o = 2\cdot(\pi\cdot 10^2) + 3.1831\cdot 2\cdot\pi\cdot 10$$

Approx(#9):
#10: $$o = 828.3186022$$

Diese Dose hätte dann eine Oberfläche von ca. 828 Quadratzentimeter.

Jetzt müsste man versuchen, diesen Rechenweg für verschiedene Werte für r durchzuführen und herausfinden, inwiefern O von r abhängt und für welches r O am kleinsten ist.

Nehmen wir also r als unabhängige Variable und berechnen allgemein h:

Benutzer:

#11: $$h = \frac{1000}{\pi\cdot r^2}$$

Dieses Ergebnis setzten wir in die Formel für O ein:

Benutzer:

#12: $$o = 2\cdot(\pi\cdot r^2) + \frac{1000}{\pi\cdot r^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot r$$

Vereinfachen ergibt

Simp(Benutzer):

#13: $$o = 2\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{2000}{r}$$

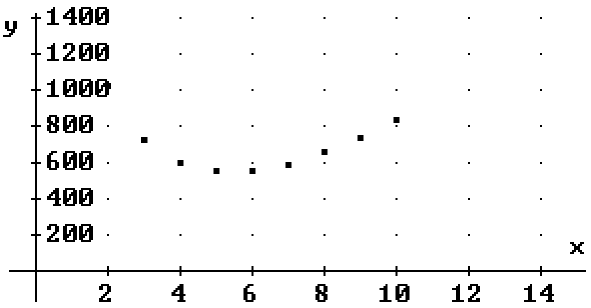
Jetzt benötigen wir einige Werte!

Benutzer:

#14: $$\mathrm{VECTOR}\left(\left[r,\ 2\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{2000}{r}\right],\ r,\ 1,\ 10\right)$$

Approx(Benutzer):

$$\#15: \quad \begin{bmatrix} 1 & 2006.283185 \\ 2 & 1025.132741 \\ 3 & 723.2153344 \\ 4 & 600.5309649 \\ 5 & 557.0796326 \\ 6 & 559.5280043 \\ 7 & 593.5903657 \\ 8 & 652.1238596 \\ 9 & 731.1602321 \\ 10 & 828.3185307 \end{bmatrix}$$



Wir sehen: Es gibt kein monotones Verhalten von O, sondern zuerst eine Abnahme , dann eine Zunahme. Irgendwo gibt es ein Minimum, zwischen r=4 und r=6!

Benutzer:

$$\#16: \quad \mathrm{VECTOR}\left(\left[r,\ 2\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{2000}{r}\right],\ r,\ 4,\ 6,\ 0.2\right)$$

Benutzer:

$$\#17: \quad \mathrm{VECTOR}\left(\left[r,\ 2\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{2000}{r}\right],\ r,\ 5.2,\ 5.6,\ 0.01\right)$$

Benutzer:

$$\#18: \quad \mathrm{VECTOR}\left(\left[r,\ 2\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{2000}{r}\right],\ r,\ 5.41,\ 5.43,\ 0.001\right)$$

Bei r=5,419 cm erhält man ein Minimum der Oberfläche, nämlich 553,58107458 Quadratzentimeter.
Diese Genauigkeit ist in der Praxis sicherlich nicht notwendig.
Es bleibt noch die zugehörige Höhe anzugeben:

Benutzer:

$$\#19: \quad 1000 = \pi\cdot 5.419^2\cdot h$$

Benutzer:

#20: $$h = \frac{1000}{\pi \cdot 5.419^2}$$

Benutzer:

#21: $$h = 10.83956428$$

Wenn man r und h vergleicht, dann kann feststellen, dass h doppelt so groß ist wie r, bzw. dass h gleich dem Durchmesser der Dose entspricht! Interessant ist die Frage, ob das bei allen optimalen Dosen so ist!